



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



**Anais, Volume XVII, n. 5, set. 2023**  
ISSN: 1982-3657 | Prefixo DOI: 10.29380

## **Eixo 5**

# **Ensino de Matemática e Ciências da Natureza**

---

**Erros em demonstrações de Grupo e Anel.**

Errors in Group and Ring demonstrations.

Viviane de Jesus Lisboa Aquino

DOI: <http://dx.doi.org/10.29380/2022.16.05.09>

Recebido em: 30/08/2022

Aprovado em: 01/09/2022

Editores responsáveis:

**Veleida Anahi Capua da Silva Charlot e Bernard Charlot**



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



*Erros em demonstrações de Grupo e Anel.*

*Errors in Group and Ring demonstrations.*

## **RESUMO**

Este trabalho busca elencar as dificuldades apresentadas por estudantes ao demonstrar que um conjunto munido de determinadas operações é uma estrutura algébrica. Vamos focar nosso estudo nas estruturas de grupo e anel. Ao trabalhar o curso de Estruturas Algébricas no decorrer da vida acadêmica surgiu a necessidade de investigar as dificuldades dos estudantes na demonstração de estruturas algébricas gerando discussões no Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática – GEPEMAT intensificando o interesse nessa questão. Como sujeitos dessa pesquisa temos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Campus Professor Alberto Carvalho da Universidade Federal de Sergipe que estão cursando as disciplinas de Estruturas Algébricas I e II. A metodologia de pesquisa utilizada é a análise de erros de CURY (1988), usando um processo qualitativo e quantitativo foram avaliados não só o número de erros e acertos como os tipos de erros que foram apresentados, concluindo que em sua maioria os participantes da pesquisa conhecem as propriedades necessárias para a estrutura algébrica, mas não conseguem fazer uma demonstração logicamente coerente das mesmas.

Palavras-chave: Anel. demonstração. erros..

## **ABSTRACT**



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



This work seeks to list the difficulties presented by students when demonstrating that a set equipped with certain operations is an algebraic structure. We will focus our study on group and ring structures. When working on the Algebraic Structures course during academic life, the need arose to investigate the difficulties of students in demonstrating algebraic structures, generating discussions in the Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática - GEPEMAT, intensifying the interest in this issue. As subjects of this research we have students from the Licenciatura em Matemática course at the Campus Professor Alberto Carvalho of the Universidade Federal de Sergipe who are studying Estruturas Algébricas I and II. The research methodology used is the analysis of errors by CURY (1988), using a qualitative and quantitative process, not only the number of hits and misses but also the types of errors that were presented were evaluated, concluding that most of the research participants they know the properties necessary for the algebraic structure, but cannot make a logically coherent demonstration of them.

Keywords: Ring. demonstration. errors. .

## INTRODUÇÃO

Ao lecionar os conteúdos de grupo e anel no curso de Estruturas Algébricas nas universidades UFPE campus Agreste (Caruaru) e UFS campus Professor Alberto Carvalho (Itabaiana) surgiu a necessidade de avaliar as dificuldades dos estudantes na demonstração de estruturas algébricas o que trouxe discussões no Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática – GEPEMAT intensificando tal interesse. Durante esta experiência foi notável a dificuldade em provar as estruturas de grupo e anel, cujas definições seguem.

Um **grupo** é um conjunto  $G$  munido de uma operação  $*$ , denotamos  $(G, *)$ , que satisfaz: para todo  $a, b, c$  pertencentes a  $G$

G.1  $a*(b*c)=(a*b)*c$  (associativa)

G.2 Existe  $e$  pertencente a  $G$  tal que  $e*a=a*e=a$  (elemento neutro)

G.3 Para todo  $a$  em  $G$ , existe  $b$  em  $G$  tal que  $a*b=b*a=e$  (elemento inverso/simétrico)



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Caso satisfaça a comutatividade

G.4  $a*b=b*a$ , para todo  $a$  e  $b$  em  $G$  (comutatividade)

Dizemos que o grupo é comutativo ou Abeliano (em homenagem ao matemático Niels Abel).

Para um anel precisamos de duas operações, como referência aos conjuntos numéricos essas operações são representadas como a soma (+) e o produto (.). Assim um conjunto  $A$  munido de duas operações, comumente denotadas por + e . será um **anel** se satisfaz as seguintes condições: para todos  $a, b, c$  em  $A$

A.1  $(A, +)$  é um grupo abeliano

A.2  $a.(b.c)=(a.b).c$  (associatividade do produto)

A.3  $a.(b+c) = a.b+a.c$  (distributividade à esquerda)

$(a+b).c = a.c+b.c$  (distributividade à direita)

Caso o produto satisfaça a propriedade

A.4  $a.b = b.a$ ,

Dizemos que o anel é **comutativo**.

Se ainda satisfizer a existência de elemento neutro da multiplicação

A.5 Existe 1 pertencente a  $A$  tal que  $1.a=a.1=a$  (elemento neutro)

Dizemos que  $(A, +, .)$  é um anel com unidade 1, também denotado por  $(A, +, ., 1)$ .

Dessa forma o procedimento de demonstrar as estruturas de grupo ou anel de um conjunto munido de uma ou duas operações se dá com a prova destas propriedades da definição. Nesse processo acontecem os erros e falhas na prova das estruturas de grupo e anel. O curso de estruturas, e mais especificamente os conteúdos de grupo e anel são essenciais na compreensão das bases da matemática, por isso é tão importante que sejam bem trabalhados e compreendidos pelo estudante, como corrobora SOARES (N. C. 2019, p. 85)



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



... os futuros professores devem estudar os conteúdos na licenciatura com profundidade maior do que aquela com que irão ensiná-los, aspecto também apontado nas Diretrizes Curriculares Nacionais de 2001, de que nem sempre está claro quais conteúdos o licenciando deverá aprender, dado que precisará conhecer mais do que o conteúdo que irá ensinar (BRASIL, 2001a). Este ponto é reforçado nas diretrizes de 2015: “os cursos de formação deverão garantir nos currículos conteúdos específicos de cada área de conhecimento, seus fundamentos e metodologias” (BRASIL, 2015, p. 13).

Neste trabalho serão enumerados os erros apresentados por alunos das disciplinas de Estruturas Algébricas I e Estruturas Algébricas II com o intuito de auxiliar o professor a planejar estratégias de ensino que possam ajudar os alunos a superar as dificuldades na demonstração das estruturas de grupo e anel.

## Fundamentação Teórica

O erro pode ser usado de diversas formas no processo de ensino e aprendizagem.

CURY (2007) traz dados e informações daqueles que considera serem os precursores da Análise de erros, entre eles está Raffaella Borasi. A pesquisadora aborda os erros trazendo formas como podem ser usados apresentadas no quadro abaixo (retirado de CURY 2007, p31, Edição Kindle)

Quadro 1 – Taxionomia de Borasi para os usos dos erros

|                                 |   |   |   |
|---------------------------------|---|---|---|
| <i>Objetivo da aprendizagem</i> | <i>Realização de uma tarefa matemática específica</i> | <i>Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático</i> | <i>Compreensão sobre a natureza da Matemática</i> |
|---------------------------------|---|---|---|



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



|                   |  |   |   |
|-------------------|--|---|---|
| <i>Remediação</i> | Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir, de forma a realizar a tarefa com sucesso.                                  | Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.  | Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da matemática ou de conteúdos específicos.   |
| <i>Descoberta</i> | Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos. | Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.   | Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.  |
| <i>Pesquisa</i>   | Erros e resultados intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemáticas                  | Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original. | Erros e resultados intrigantes motivam questões que podem levar a insights e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático. |

Fonte: Borasi (apud CURY 2007)

Essas nove maneiras de usar os erros podem acontecer de forma separada ou concomitante.

Dentro da experiência como discente e docente foi perceptível um maior uso do erro na sala de aula como remediação, procurando compreender o que houve de errado e corrigir para realizar a tarefa com sucesso. Aqui será usado na pesquisa, especialmente na intenção de desenvolver novas tarefas e processos que auxiliem no aprendizado do conteúdo.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



O ponto fundamental da análise de erros não é o erro em si, mas como ele é usado. Nessa perspectiva entende-se o erro como uma certeza do estudante, onde devemos nos aprofundar em tal certeza e daí conceber processos para mudar essa premissa falsa do nosso aluno. Neste ponto concordamos com a autora CURY (2007, p.71) quando diz que o erro “se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.”

Em sua dissertação de mestrado CURY (1998) traz outro quadro onde Borasi propõe uma categorização dos erros conforme seu uso para o ensino, “de acordo com o objetivo com o qual o erro é estudado e com o foco sob o qual o erro é examinado” tal quadro se apresenta a seguir

Quadro 2 – Uso dos erros pensando no objetivo e no foco.

| <i>Objetivo \ Foco</i>              | <i>Considerando o conteúdo técnico do erro</i>   | <i>Considerando, através dos erros, a natureza de um assunto</i>   | <i>Considerando através dos erros, o processo de aprendizagem</i>   |
|-------------------------------------|--|--|---|
| <b>DIAGNÓSTICOS<br/>E PREVENÇÃO</b> | Erros como sinais de que o processo de aprendizagem falhou. Suas causas são diagnosticadas no esforço para eliminá-los.<br><br>1 | Erros como projeções dos equívocos básicos do aluno sobre a natureza do assunto. O professor tenta identificá-los e planejar recuperação.<br><br>2 | Erros como meios de identificar dificuldades potenciais e armadilhas no processo de aprendizagem de um tópico e consequentemente aperfeiçoar o currículo a fim de evitá-las no futuro.<br><br>3 |



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



|                     |  |  |   |
|---------------------|--|--|---|
| <i>INVESTIGAÇÃO</i> | Erros como ponto de partida para exploração de tópicos de Matemática.<br><br>4 | Erros por meios de investigar as forças, limitações e metodologias de uma disciplina.<br><br>5 | Erros como meios de investigar a forma da mente trabalhar.<br><br>6 |
|---------------------|--|--|---|

Fonte: Borasi (apud Cury 1998)

Esta pesquisa se encaixa nos quadros 1, 2 e 3 acima, onde o uso do erro tem por objetivos o diagnóstico e a prevenção tendo como foco o conteúdo técnico do erro, a natureza do assunto e o processo de aprendizagem.

O processo de análise não é fixo, muda de pesquisa em pesquisa e de pesquisador para pesquisador, uma mesma questão com respostas semelhantes pode trazer à tona análises diversas dependendo do olhar do pesquisador como destaca CURY, 2011

...cada pesquisador, ao deparar-se com um corpus, produz uma categorização que evidencia sua visão específica do assunto. Assim, apesar de termos questões idênticas, não só as respostas dos participantes das duas pesquisas são distintas, como também a classificação dos erros. Porém, em uma síntese final, é possível encontrar as dificuldades comuns aos dois grupos de estudantes e, a partir delas, tecer considerações com base na literatura revisada. (p. 106)

Dessa forma o mesmo questionário aqui aplicado se realizado por outro pesquisador obtendo as mesmas respostas poderá gerar conclusões distintas.





# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Esta pesquisa foi realizada com uma abordagem quantitativa e qualitativa procurando saber não só o número de erros como também o tipo deles focando no objetivo de avaliar os erros e futuramente pesquisar formas de sanar as dificuldades que possam ter gerado tais erros. Os dados colhidos foram analisados segundo a metodologia de análise de erros de CURY (2007). O processo de análise dos questionários aplicados foi feito pelas etapas de análise de conteúdo indicadas por Bardin (1979, p. 95 a 101) resumido aqui:

1. a pré-análise: na qual há a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final;
2. a exploração do material: é a análise propriamente dita, a administração sistemática das decisões tomadas;
3. tratamento dos resultados obtidos e interpretação: os resultados brutos são tratados de maneira a apresentarem significados, o uso de análises estatísticas gera resultados, diagramas, figuras e modelos que condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise.

Nesse processo os dados recolhidos na pesquisa com a participação de 13 discentes do curso de Licenciatura em Matemática foram selecionados e, após uma classificação das respostas em correta, parcialmente correta, incorreta ou em branco (conforme as definições apresentadas a seguir), inicialmente excluídos aqueles deixados em branco.

Daqui em diante foi feita análise e o registro da mesma para na sequência realizar o tratamento dos dados. Conforme o texto descreve.

## Metodologia

A pesquisa foi realizada com a participação de 13 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática sendo 8 matriculados em Estruturas Algébricas I e 5 em Estruturas Algébricas II. Daqui em diante serão chamadas apenas de Estruturas I e Estruturas II.

Os participantes da pesquisa foram identificados, em ordem aleatória, por  $Ax.y$  onde  $x$  pode ser substituído por 1 ou 2 indicando se o estudante está matriculado em Estruturas I ou II, respectivamente, e  $y$  a ordem aleatória entre os matriculados daquela turma.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Pretendendo avaliar a habilidade de demonstrar as estruturas de anel e grupo de determinados conjuntos com operações específicas foram aplicados 2 questionários, o primeiro versando sobre anel (pois é o conteúdo trabalhado primeiro no curso de Estruturas I) seguido de um questionário versando sobre grupo.

As respostas foram inicialmente classificadas em

- Correta (C): demonstração com raciocínio lógico correto provando as propriedades necessárias corretamente.
- Parcialmente corretas (PC): resposta incompleta.
- Incorreta (I): demonstração com raciocínio incorreto, trocando propriedade ou deixando apenas um exemplo.
- Em Branco (EB): resposta em branco.

Depois desse passo os dados foram registrados e partiu-se para a análise das respostas parcialmente corretas e incorretas, procurando comparar os erros apresentados pelos estudantes e tentar distinguir as possíveis justificativas para os mesmos.

## **Análise do Questionário Anel**

O questionário sobre anel, futuramente representado por QA, é dado a seguir, reescrito para a compor o artigo.

Considere o conjunto das matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais, onde definimos as operações de soma e produto de matrizes usuais.

1. Mostre que este conjunto com as operações definidas é um anel.
2. Este anel é comutativo? Justifique.
3. Este anel possui elemento neutro da multiplicação (Unidade)? Se sim qual?

Como todas as questões tratam de demonstrações de propriedades de operações as respostas e erros serão tratados em conjunto, não separadamente.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



O QA foi respondido por 12 alunos, sendo 8 de Estruturas I e 4 em Estruturas II. Inicialmente faremos uma análise conjunta dos resultados destes 12 alunos.

A Tabela 1 a seguir mostra como as respostas foram classificadas por questão.

Tabela 1: Classificação das respostas do QA

| Valor | Q1 | Q2 | Q3 | Total | %    |
|-------|----|----|----|-------|------|
| C     | 0  | 6  | 1  | 7     | 19%  |
| PC    | 11 | 1  | 8  | 20    | 56%  |
| I     | 1  | 4  | 1  | 6     | 17%  |
| EB    | 0  | 1  | 2  | 3     | 8%   |
| Total | 12 | 12 | 12 | 36    | 100% |

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme a definição dada para as respostas PC a maioria dos alunos não completaram a demonstração. O que indica a necessidade de trabalhar as propriedades das operações do anel e o processo de demonstração das mesmas.

Olhando separadamente podemos observar pelos dados apresentados na Tabela 2 a seguir que os índices de respostas consideradas C, PC, I ou EB foram semelhantes entre as turmas, com uma leve baixa na percentagem das PC (42% para 63%) e C (17% para 21%) da turma de Estruturas II em comparação com a turma de Estruturas I enquanto as respostas I (25% para 13%) e EB (17% para 4%) aumentaram.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Tabela 2: Classificação das respostas do QA por turma.

| Valor | Est. I | Est. II |
|-------|--------|---------|
| C     | 5      | 2       |
| PC    | 15     | 5       |
| I     | 3      | 3       |
| EB    | 1      | 2       |
| Total | 24     | 12      |

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse resultado mostra que a turma de Estruturas II teve um pior rendimento que a turma de Estruturas I, isso considerando que é melhor demonstrar faltando algo que demonstrar errado. Este melhor rendimento por parte dos alunos de Estruturas I pode ser justificado pela proximidade do trabalho com essa definição nesta turma, os alunos haviam acabado de estudar exemplos de anel. Ainda assim o número de respostas PC, onde a demonstração ficou incompleta, ainda é muito grande nesta turma, trazendo à tona dificuldades em demonstrar corretamente a estrutura de anel.

Ao analisar as respostas consideradas parcialmente corretas e incorretas os seguintes erros foram encontrados:

EA1: Mostrou a propriedade apenas de um lado sem usar a comutatividade.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



EA2: Não mostrou alguma propriedade necessária para ser anel.

EA3: Indicou a propriedade sem mostrar.

EA4: Não concluiu que é anel.

EA5: Concluiu que o anel é comutativo porque a soma é comutativa.

EA6: Mostrou uma propriedade não necessária para ser anel.

EA7: Apresentou exemplo que não prova.

A Tabela 3 a seguir mostra o número de erros cometidos de cada tipo separado por turma.

Tabela 3: Erros cometidos por turma.

| Erros | Est. I | Est. II |
|-------|--------|---------|
| EA1   | 12     | 0       |
| EA2   | 0      | 1       |
| EA3   | 2      | 3       |
| EA4   | 1      | 1       |
| EA5   | 0      | 1       |
| EA6   | 1      | 2       |



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



|       |    |   |
|-------|----|---|
| EA7   | 2  | 0 |
| Total | 18 | 8 |

Fonte: Dados da pesquisa.

Notamos aqui que o erro EA1 foi cometido apenas pelos alunos da turma de Estruturas I (resposta esta considerada PC). Vejamos exemplo dos dois erros mais cometidos neste questionário.

O estudante A1.5 mostrou que a matriz identidade é o elemento neutro do anel pela direita sem provar o outro lado, se a operação fosse comutativa (e já estivesse provada a comutatividade) não seria necessária a prova do outro lado, mas como nem é comutativa é necessário provar que é o elemento neutro pelo outro lado. Nesse ponto nota-se a dificuldade dos estudantes em perceber essa necessidade o que pode ser explicado pelo fato de os exemplos mais trabalhados no conteúdo são de anéis comutativos, onde não seria necessária essa confirmação do neutro pela esquerda.

O segundo erro mais frequente é EA3 cometido por alunos das duas turmas, intui-se que a noção por parte do estudante de que o exemplo prova faça com que a simples apresentação do elemento ou propriedade seja considerada uma prova do mesmo.

Como exemplo deste erro o estudante A2.2 indicou o elemento neutro do produto, a matriz identidade, sem mostrar que satisfaz a propriedade da unidade. Aqui é perceptível que falta a compreensão de que indicar um elemento é diferente de mostrar que ele é o ser procurado. O processo correto seria mostrar que este satisfaz a propriedade de ser o elemento neutro (o que o estudante A1.5 fez parcialmente) ou calcular o elemento a partir da propriedade satisfeita.

Fica claro através dos erros encontrados nas respostas dos estudantes que sua maior dificuldade está no processo da demonstração e não nas operações com matrizes. Tendo em vista que os mesmos realizaram os cálculos com matrizes de forma correta.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Assim a demonstração de um anel trouxe à tona erros básicos de demonstração como indicar algo sem mostrar e apresentar exemplo como prova, mas também erros específicos deste tipo de demonstração onde se omite uma propriedade a ser provada (ou mesmo parte dela, o caso do erro mais cometido) ou mostrando propriedade não necessária para ser anel. Com base nestes erros o professor pode trabalhar o conteúdo de forma que o aluno perceba o motivo pelo qual os cometeu e assim redefina essas relações para que não os cometa novamente.

## **Análise do Questionário Grupo**

A seguir é apresentado o Questionário de Grupo, futuramente representado por QG, foi editado para compor o artigo.

Considere o conjunto dos automorfismos do corpo dado pelos restos da divisão de um número inteiro por 3, nele definimos a operação de composição de funções.

1. Mostre que o conjunto dos automorfismos do corpo dado pelos restos da divisão de um número inteiro por 3, com a operação de composição acima definida, é um grupo.
2. Este grupo é Abelian? Justifique.

Seguindo o mesmo processo do QA, as respostas e erros serão tratados em conjunto e não separadamente. As respostas foram classificadas em C, PC, I e EB com os mesmos critérios de QA. Participaram da aplicação deste questionário 3 alunos da turma de Estruturas I e 5 da turma de Estruturas II, a redução no número de participantes na turma de Estruturas I se deu por conta da falta dos estudantes no dia de aplicação do mesmo.

A Tabela 4 apresenta os dados das respostas às duas questões do QG apresentadas pelos 8 estudantes participantes da pesquisa.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Tabela 4: Classificação das respostas do QG.

| Valor | Q1 | Q2 | Total | %    |
|-------|----|----|-------|------|
| C     | 0  | 0  | 0     | 0%   |
| PC    | 2  | 1  | 3     | 19%  |
| I     | 3  | 1  | 4     | 25%  |
| EB    | 3  | 6  | 9     | 56%  |
| total | 8  | 8  | 16    | 100% |

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste questionário a dificuldade dos alunos foi maior, tendo em vista que não houveram respostas consideradas corretas, e a maioria dos estudantes 56% sequer respondeu a atividade. Isso pode ser justificado pela falta de prática com o conjunto e a operação escolhida para este questionário, diferente do QA onde foi usado o anel das matrizes, bem mais conhecido dos estudantes.

Comparando por turma notamos que mesmo com um número menor de participantes a turma de Estruturas I tentou mais o QG do que a turma de Estruturas II onde a taxa de respostas EB foi de 70%.

Tabela 5: Classificação das respostas do QG por turma

| Valor | Est. I | Est. II |
|-------|--------|---------|
|-------|--------|---------|





# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



|       |   |    |
|-------|---|----|
| C     | 0 | 0  |
| PC    | 1 | 2  |
| I     | 3 | 1  |
| EB    | 2 | 7  |
| Total | 6 | 10 |

Fonte: Dados da Pesquisa

Os erros encontrados nas respostas PC e I foram os seguintes:

EG1: Acertou as propriedades, mas errou nas funções e na aplicação da operação.

EG2: Elencou as propriedades que precisam ser cumpridas para ser grupo e não provou nada.

EG3: Indicou as propriedades com algum equívoco na definição das mesmas e tentou provar de maneira errada.

A grande diferença na quantidade de erros nos questionários QA e QG pode ser explicada tanto pela quantidade de participantes da pesquisa quanto pela maior simplicidade da definição de grupo, por envolver apenas 1 operação e 4 propriedades enquanto no anel temos 2 operações e 5 propriedades, ou melhor 8 propriedades se consideramos que na definição trocamos a propriedade de  $(A,+)$  ser grupo abeliano pelas 4 propriedades correspondentes.

A quantidade de cada erro cometido por turma é apresentada na Tabela 6 a seguir.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Tabela 6: Erros cometidos por turma

| Erros | Est. I | Est. II |
|-------|--------|---------|
| EG1   | 3      | 0       |
| EG2   | 1      | 2       |
| EG3   | 0      | 1       |
| Total | 4      | 3       |

Fonte: Dados da pesquisa.

Mais uma vez notamos que um dos erros, neste caso EG1, foi cometido apenas pela turma de Estruturas I, enquanto o erro EG2 foi cometido por estudantes nas duas turmas, tornando-o mais interessante. Porém como foram apresentados os dois erros mais cometidos no QA, agora também serão trazidos exemplos destes dois erros que são os mais cometidos no QG.

O estudante A1.5 indicou a função identidade como o elemento neutro da composição, o que é verdade, mas toma como automorfismo do corpo dado a função polinomial de grau 1 qualquer, esta função não é um homomorfismo de corpos. Aqui o estudante apresenta dificuldade em identificar o que é um homomorfismo e aí usar essa propriedade para mostrar que a identidade é o neutro da composição, sem indicar outras funções do conjunto dos automorfismos, esta resposta foi considerada I por cometer o erro EG1.

O estudante A1.2 indicou as propriedades necessárias para ser um grupo e não mostrou nada, erro EG2, onde a resposta foi considerada PC. O que pode ter acontecido por falta de tempo ou mesmo o pensamento de que bastava indicar a propriedade sem demonstrar, como ocorreu no QA.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Estes erros mostram uma dificuldade em apresentar provas das propriedades necessárias para uma estrutura algébrica, ou mesmo a dificuldade em indicar tais propriedades corretamente. Sendo recorrentes corroboram a necessidade de um trabalho diferenciado com estes conteúdos, comumente apresentados como definição – exemplo.

Pontualmente ocorreram erros de operações com números reais (nas matrizes) ou com a composição de funções, porém não geraram o erro na questão, por isso foram desconsiderados na análise.

O estudo dos anéis e grupos como estruturas algébricas dá bases para todo o trabalho com as propriedades dos conjuntos numéricos fazendo ainda uma generalização para qualquer conjunto com operações que satisfazem aquelas propriedades. Esse ponto é o que dificulta a compreensão dos estudantes.

Pensar que algo tão natural, como a associatividade nas operações com números racionais por exemplo, precisa ser demonstrada, como demonstrar algo que já é verdade?

Os erros aqui apresentados confirmam essa dificuldade em aceitar a necessidade de demonstração para o que já era aceito como verdade. Ou mesmo em abstrair casos onde aquilo que era verdade em um conjunto (como a comutatividade do produto) pode não ser verdade em outro.

Dessa forma fica confirmada a necessidade de um trabalho diferenciado nessas definições para que o estudante possa compreender a diferença entre algo que é fato e algo que precisa ser demonstrado.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### Conclusão

Devido à importância inerente dos conteúdos de anel e grupo suas definições devem ser bem compreendidas para dar andamento ao curso de estruturas. Essas definições trazem propriedades que as operações definidas nos conjuntos devem cumprir e mostrar que são estruturas algébricas do tipo procurado passa pela prova destas propriedades. Por isso pesquisar o erro no momento dessa prova é de suma importância para o bom andamento do curso.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



Ao responder os questionários apresentados tanto os estudantes que cursam Estruturas I quanto os que cursam Estruturas II mostram dificuldade em distinguir as propriedades necessárias para ser anel ou grupo assim como em mostrar tais propriedades, mais que em operar no conjunto.

Isso mostra a necessidade de trabalhar essas definições possibilitando aos estudantes perceberem quais as propriedades pedidas para cada uma das estruturas dadas. O trabalho repetitivo de tomar exemplos e mostrar cada uma das propriedades pode não funcionar com toda a turma, por isso é indicado a procura de atividades distintas que possam trazer uma nova visão dessas propriedades para os alunos.

Como continuidade deste trabalho pretende-se reavaliar tais erros com novos participantes onde serão realizadas atividades diferenciadas para auxiliar no aprendizado do conteúdo.

## REFERÊNCIAS

### Referências

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Porto: Edições 70, 1979.

CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos de 3º grau**. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação). Porto Alegre: UFRGS, 1988.

CURY, H. N. **Análise de Erros**. Edição do Kindle. Editora Autêntica, 2007.

CURY, H. N.; BORTOLI, M. de F. . **Pensamento algébrico e análise de erros: algumas reflexões sobre dificuldades apresentadas por estudantes de cursos superiores**. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 1, p. 101-113, 2011.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 5. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.



# Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade

www.coloquioeducon.com  
27 a 29 de setembro de 2023



SOARES, N. C. **O ensino de teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática**. 2019. 96f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/22540/2/Nat%c3%a1lia%20Coelho%20Soares.pdf>. Acesso em 14 de agosto de 2022.